На правах рукописи

ДИГАС Борис Вадимович

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПОЗИЦИОННО-УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2007

Работа выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Максимов Вячеслав Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ишмухаметов Альберт Зайнутдинович (Вычислительный центр РАН), доктор физико-математических наук, доцент Хачай Михаил Юрьевич (Институт математики и механики УрО РАН)
Ведущая организация:	Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 24 октября 2007 года в $15^{\underline{00}}$ час. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А. М. Горького по адресу:
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

Автореферат разослан 22 сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена приложениям одного из основополагающих принципов теории гарантированного управления — принципа экстремального сдвига Н. Н. Красовского[1–3] — к задачам моделирования неизвестных входов в динамических системах и задачам невыпуклой оптимизации. Для решения поставленных задач конструируются регуляризирующие итерационные алгоритмы, основанные на методах позиционного управления.

Задачи моделирования неизвестных характеристик изучаемых объектов по доступной информации возникают в исследованиях различных динамических процессов и явлений. Такие задачи относятся к классу обратных задач динамики управляемых систем, состоящих в нахождении неизвестного входа системы по измерениям ее выхода. Уравнение, задающее динамику системы, как правило, предполагается известным. Входом являются факторы, однозначно определяющие движение системы, например, управление, подаваемое на систему. Выходом может быть любая доступная информация об управляемом процессе, например, некоторый сигнал о текущей траектории системы.

Исследования в области обратных задач динамики берут свое начало в 1960-х годах и активно продолжаются по настоящее время. Существенное влияние на развитие теории обратных задач оказали достижения в области некорректных задач. Известно, что обратные задачи динамики, как правило, являются некорректно поставленными. В таких случаях проблема построения их приближенных решений сводится к построению соответствующих регуляризирующих алгоритмов. Основы теории некорректных задач заложены в работах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева,

[1]Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[2]Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3]Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

В. Г. Романова, В. В. Васина[4–6]. Значительную роль в развитии методов решения обратных и некорректных задач сыграли также Ф. А. Черноусько, А. Б. Куржанский, В. И. Агошков, Ф. П. Васильев, В. Я. Арсенин и другие ученые. Исследования этих авторов касаются, как правило, программной постановки задачи: регуляризирующие алгоритмы обрабатывают всю историю измерений выхода (имеют апостериорный характер). В работах Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского[7, 8] был развит подход к построении позиционных алгоритмов регуляризации для конечномерных управляемых систем. Алгоритмы, изложенные в этих работах, основаны на сочетании некоторых принципов теории позиционного управления с моделью, развитых Н. Н. Красовским и его школой[1–3], и методов теории некорректных задач[4–6]. С расчетом на возможность практической реализации эти алгоритмы строятся в классе конечно-шаговых алгоритмов, т.е. учитывают поступающую информацию в конечном числе временных узлов, обрабатывая ее между узлами. Данный подход успешно применялся при решении обратных задач для систем с распределенными параметрами В. И. Максимовым, А. И. Коротким, А. В. Кимом, А. И. Цепелевым, В. Л. Розенбергом, Е. В. Васильевой и другими авторами. Отметим, что первые две главы настоящей диссертации продолжают указанные выше исследования.

В третьей главе рассматривается задача нахождения оптимального параметра совместности для системы невыпуклых неравенств. Подобного рода постановки находят применение в различных разделах экономики, страхования и т.д. Стандартные методы оптимизации, такие как гради-

[4]Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.

[5]Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

[6]Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, СО, 1980.

[7]Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 29–41.

[8]Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Gordon and Breach. London. 1995.

ентные методы, методы штрафных и барьерных функций, гомотопические методы, методы стохастической оптимизации либо неприменимы для решения невыпуклых задач, либо вызывают специфические трудности при конструктивной реализации. В связи с этим развиваются специализированные подходы, ориентированные на решение конкретных типов задач невыпуклой оптимизации. Предлагаются подходы к итерационному решению оптимизационных задач, невыпуклость которых определяется присутствием в них разностей выпуклых функций. Развиваются методы оптимизации, основанные на игровых моделях. Для некоторых классов задач, в определенном смысле близким к выпуклым, известны итерационные алгоритмы решения, использующие операции с функцией Лагранжа. В частности, широко применяются алгоритмы оптимизации, основанные на привлечении так называемых расширенных лагранжианов, позволяющих распространить на невыпуклые задачи теорию двойственности.

Как и задачи из первой и второй глав, изучаемая в третьей главе оптимизационная задача также является некорректной, поскольку предусматривает неточность информации о входных данных. Построение методов регуляризации оптимизационных задач — нахождения их устойчивых приближенных решений на основании возмущенных данных — составляет обширный раздел теории некорректных задач[4]. Материал третьей главы идейно примыкает к работам[9–14], развивающим методы решения обратных задач динамики и задач оптимизации. В частности, в [10] разработана техника выпуклой оптимизации, в основе которой лежит модификация так

[9]Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Сб. науч. тр. «Некоторые методы позиционного и программного управления». Свердловск. 1987. С. 34–54.

[10]Ermoliev Yu. M., Kryazhimskii A. V., Ruszczyński A. Constraint aggregation principle in convex optimization // Mathematical Programming. 1997. Series B, 76. P. 353–372.

[11]Kryazhimskii A. V. Convex optimization via feedbacks // SIAM J. Control Optimization, 1999. Vol. 37. P. 278–302.

[12]Kryazhimskii A.V., Paschenko S.V. On the problem of optimal compatibility. J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9. No. 3. pp. 283–300.

называемого метода «агрегирования ограничений», предложенного в работе [9], и развитого в других исследованиях[11, 14, 15]. В [12] рассматривалась задача об оптимальной совместности однопараметрических семейств линейных уравнений. Был построен основанный на принципе экстремального сдвига итерационный метод решения указанной задачи. Вышеупомянутые исследования касались задач выпуклой оптимизации при ограничениях в форме линейных равенств и неравенств, а также невыпуклой оптимизации при ограничениях в форме равенств. В третьей главе настоящей диссертации рассмотрена задача невыпуклой оптимизации при ограничениях в форме неравенств.

Цель работы. Исследование задач моделирования неизвестных управляющих параметров в распределенных системах по неточным замерам фазовых траекторий. Исследование задачи нахождения оптимального параметра совместности для системы невыпуклых неравенств. Разработка и апробация устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений итерационных алгоритмов решения указанных задач.

Методы исследования. В работе используются элементы функционального анализа, выпуклого анализа, теории некорректных задач, теории позиционного управления.

Научная новизна. В диссертации исследован ряд некорректных задач моделирования неизвестных входов распределенных систем и оптимизации. Предложены регуляризирующие алгоритмы решения рассматриваемых задач с использованием техники позиционного управления по принципу обратной связи. Результаты диссертационной работы являются новыми.

[13]Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Экстремальные задачи с отделимыми графиками // Кибернетика и систем. анализ. 2002. No. 2. С. 32–55.

[14]Ровенская Е.А. К решению задачи об оптимальном параметре совместности для одного класса уравнений в банаховом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. т. 44. № 12. С. 2150–2166.

[15]Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С. О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 3. С. 119–125.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты работы дополняют теорию обратных задач динамики управляемых систем, описываемых уравнениями в частных производных, а также теорию невыпуклой оптимизации. Разработанные в диссертации итерационные алгоритмы ориентированы на компьютерную реализацию, предназначены для работы в условиях неточности данных и могут быть использованы для решения конкретных прикладных задач.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Диссертация подготовлена в системе LaTeX. Общий объем диссертации составляет 108 страниц. Библиографический список включает 122 наименования, в том числе 11 публикаций автора по теме диссертации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на Третьем Международном симпозиуме по методам и моделям в автоматизации и робототехнике (MMAR-96), Медзыздрое, Польша, 1996; на Школе молодых ученых Международного института прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия, 1998; на Международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения», Челябинск, 1999; на XXXIII Молодежной школе-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2002; на Международном семинаре «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби» (CGS'2005), Екатеринбург, 2005; на Второй Международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2007), Москва, 2007; на семинарах в ВЦ РАН; в Институте математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–11].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются цели и задачи работы, ее актуальность, а также кратко излагаются основные результаты, полученные в работе.

В главе 1 исследуется задача моделирования управлений в параболических уравнениях по результатам неточных измерений фазовых состояний.

В параграфе 1.1 приводятся формулировка задачи и вспомогательные утверждения.

В гильбертовом пространстве H рассматривается уравнение вида

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = B(x(t))u(t) + B_1(x(t)) + f(t), \\ x(t_0) = x_0 \in V, \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \end{gathered} \tag{1}$$

в котором управление $u = u(\cdot) \in U_{t_0,\vartheta}$ предполагается неизвестным. Здесь $(H, |\cdot|_H)$ — действительное гильбертово пространство, отождествляемое со своим сопряженным: $H = H^*$, $(V, \|\cdot\|)$ — сепарабельное и рефлексивное банахово пространство, V вложено в H плотно и непрерывно, $(U, \|\cdot\|_U)$ — равномерно выпуклое сепарабельное банахово пространство,

$$u(\cdot) \in U_{t_0,\vartheta} = \{u(\cdot) \in L_2(T; U) : u(t) \in P_1 \text{ при п. в. } t \in T\},$$

$P_1 \subset U$ — выпуклое ограниченное множество, $B(x)$ — семейство операторов, удовлетворяющих условию

Условие 1. 0) *Отображение* $B(x) : U \to V^*$ *линейно* $\forall\, x \in V$;

1) $\|\{B(x) - B(y)\}u\|_{V^*} \le L\|x - y\|\,\|u\|_U \quad \forall\, x, y \in V,\ u \in P$;

2) $\|B(x(t))u\|_{V^*} \le \varphi_{x(\cdot)}(t)\|u\|_U$ *при п. в.* $t \in T \quad \forall\, u \in P,\ \ x(\cdot) \in L_2(T; V)$ $\big(\varphi_{x(\cdot)}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R})\big)$;

3) $D(B(x)) = D \subset U \quad \forall\, x \in V,\ \ P \subset D$;

4) *если* $u_i(\cdot) \to u(\cdot)$ *слабо в* $L_2(T; U)$, $u_i(\cdot), u(\cdot) \in U_{t_0,\vartheta}$, *то* $B_{x(\cdot)}u_i(\cdot) \to B_{x(\cdot)}u(\cdot)$ *-*слабо в* $L_2(T; V^*)$ $\forall\, x(\cdot) \in L_2(T; V)$.

Здесь P — замыкание в метрике пространства U множества P_1: $P = \overline{P_1}$, $f(\cdot)$ — заданное возмущение, т. е. функция со свойствами: $f(\cdot), f_t(\cdot) \in L_2(T;H)$, оператор $B_{x(\cdot)}u(\cdot) : L_2(T;U) \to L_2(T;V^*)$, $\forall\, x(\cdot) \in L_2(T;V)$, задается по правилу:

$$\left(B_{x(\cdot)}u(\cdot)\right)(t) = B(x(t))u(t) \text{ при п. в. } t \in T.$$

Семейство операторов $B_1(\cdot) : V \to V^*$ обладает свойством:

$$\|B_1(x) - B_1(y)\|_{V^*} \leq L_1 \|x - y\|_V \quad \forall\, x,\, y \in V, \quad B_1(0) = 0.$$

Решением (1), порожденным управлением $u(\cdot) \in U_{t_0,\vartheta}$, называется функция $x(\cdot) = x(\cdot\,; u(\cdot)) \in W(T;V^*) = \{w(\cdot) \in L_2(T;V) : w_t(\cdot) \in L_2(T;V^*)\}$, удовлетворяющая (1). При этом истинное управление нам не известно.

В дискретные, достаточно частые, моменты моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad i \in [0 : m-1] \quad (\tau_i = \tau_{i-1} + \delta, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta),$$

замеряется (с ошибкой h) реализация $x(t)$, $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ траектории $x(\cdot)$. Требуется построить алгоритм, который по текущим измерениям $x(\cdot)$ «в реальном времени» восстанавливает некоторое управление $u_*(\cdot)$, порождающее траекторию $x(\cdot)$. Так как точное восстановление истинного управления невозможно, с одной стороны, в силу неточности измерений, а с другой — в силу возможной неединственности управления $u(\cdot) \in U_{t_0,\vartheta}$, порождающего $x(\cdot)$, то потребуем, чтобы алгоритм формировал некоторое приближение $u_h(\cdot)$ одного из управлений $u_*(\cdot)$, порождающих выход $x(\cdot) = x(\cdot; u_*(\cdot))$. Это приближение $u_h(\cdot)$ должно быть таким, что отклонение $u_h(\cdot)$ от $u_*(\cdot)$ «мало» в метрике пространства $L_2(T;U)$ при достаточной малости измерительной погрешности h и диаметра δ разбиения отрезка T.

В § 1.2 указывается устойчивый к погрешностям вычислений алгоритм решения этой задачи, который основан на сочетании принципа управления с моделью и метода сглаживающего функционала.

Пусть тройки $\{V_\varepsilon, p_\varepsilon, r_\varepsilon\}$ и $\{U_\varepsilon,\, q_\varepsilon,\, s_\varepsilon\}$ ($\varepsilon \in \mathcal{H}_0$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^g$) образуют внутренние аппроксимации[16–18] пространств V и U, т. е.

1°. V_ε, U_ε — конечномерные пространства с нормами $\|\cdot\|_\varepsilon$ и $\|\cdot\|_{U_\varepsilon}$, индуцированными нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_U$:

$$\|y\|_\varepsilon = \|p_\varepsilon y\| \ \ \forall\, y \in V_\varepsilon, \quad \|u\|_{U_\varepsilon} = \|q_\varepsilon u\|_U \quad \forall\, u \in U_\varepsilon;$$

2°. $p_\varepsilon : V_\varepsilon \to V$ и $q_\varepsilon : U_\varepsilon \to U$ — линейные взаимно-однозначные непрерывные операторы, $r_\varepsilon : V \to V_\varepsilon$ и $s_\varepsilon : U \to U_\varepsilon$ — линейные операторы;

3°. $p_\varepsilon r_\varepsilon y \to y$ в V при $\varepsilon \to 0, \forall\, y \in V_1$, V_1 — плотное в V подпространство;

4°. $\|(I - q_\varepsilon s_\varepsilon)u\|_U \le \mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0 \ \ \forall\, u \in P_1$.

В пространстве V_ε вводятся также норма $|\cdot|_\varepsilon$ и скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_\varepsilon$, индуцированные нормой $|\cdot|_H$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$:

$$|y|_\varepsilon = |p_\varepsilon y|_H, \quad (y,z)_\varepsilon = (p_\varepsilon y, p_\varepsilon z)_H \quad \forall\, y, z \in V_\varepsilon,$$

а в пространстве V^* — α-норма $\|\cdot\|_\alpha$ и отвечающее ей скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$:

$$\|y\|_\alpha = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j\rangle^2\Big)^{1/2}, \quad \langle x, y\rangle_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle x, \omega_j\rangle \langle y, \omega_j\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — двойственность между V и V^*; $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ — совокупность элементов со свойствами: $\omega_j \in V_1$, $\|\omega_j\| = 1$, линейные комбинации ω_j образуют всюду плотное в V множество; $0 < \alpha_j < 1$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = K_\alpha < \infty$.

Введем семейства операторов $B_\varepsilon(\xi) : U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ и функций $B_\varepsilon^{(1)}(\xi) \in V_\varepsilon$ $\forall\, \xi \in V_\varepsilon$ по правилу

$$(B_\varepsilon(\xi)u_\varepsilon,\ y)_\varepsilon = \langle B(p_\varepsilon\xi) q_\varepsilon u_\varepsilon, p_\varepsilon y\rangle \quad \forall\, y \in V_\varepsilon,\ u_\varepsilon \in U_\varepsilon,$$

---

[16] Сьярле Ф., Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

[17] Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

[18] Arnăutu V., Approximation of optimal distributed control problems governed by variational inequalities // Numerische Mathematik. 1982. Vol. 38. P. 393–416.

$$(B_\varepsilon^{(1)}(\xi),\ y)_\varepsilon = \langle B_1(p_\varepsilon\xi), p_\varepsilon y\rangle \quad \forall\, y \in V_\varepsilon.$$

Предположим, что заданы выпуклые, ограниченные и замкнутые множества $Q_\varepsilon \subset U_\varepsilon$, такие, что

5°. $\chi(Q_\varepsilon, s_\varepsilon P_1) = \gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где χ — хаусдорфово расстояние между множествами, т. е.

$$\chi(Q_\varepsilon, s_\varepsilon P_1) = \inf\{\gamma : Q_\varepsilon \subset (s_\varepsilon P_1)(\gamma),\ s_\varepsilon P_1 \subset Q_\varepsilon(\gamma)\},$$

символ $Q_\varepsilon(\gamma)$ означает замкнутую γ-окрестность множества Q_ε;

6°. $\|B(x)q_\varepsilon u_\varepsilon\|_{V^*} \le k\|x\|\,\|q_\varepsilon u_\varepsilon\|_U \ \ \forall\, \varepsilon \in \mathcal{H}_0, \forall\, x \in V,\ u_\varepsilon \in Q_\varepsilon(\gamma(\varepsilon))$.

В моменты $\tau_i \in T$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta(h)$, $\delta(h) > 0$, $i \in [1 : m]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$ замеряется с ошибкой «проекция» траектории $x(t)$, $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ системы (1) на пространство V_ε, т. е. вычисляется $\xi_{\tau_{i-1},\tau_i}(\cdot)$,

$$\xi(t) \in V_\varepsilon, \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i].$$

Символ $\xi_{a,b}(\cdot)$ означает функцию $\xi(t),\ t \in (a, b]$, рассматриваемую как единое целое. Точность замеров определяется соотношением

$$\|p_\varepsilon\xi(t) - x(t)\| \le h, \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i].$$

Возьмем отображения $\alpha(h) \in (0, 1)$ и $\varepsilon(h) \in \mathcal{H}_0$, такие что

$$\alpha(h) \to 0,\ \Phi(h, \delta(h), \varepsilon(h))/\alpha(h) \to 0 \ \text{ при } h \to 0,\ \varepsilon(h) \to 0,$$

где

$$\Phi(h, \delta, \varepsilon) = h + \delta + \mu(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon) + \mu_1(\varepsilon), \quad \mu_1(\varepsilon) = \big\|(p_\varepsilon r_\varepsilon - I)x_0\big\|^2.$$

Введем конечномерную управляемую систему (модель):

$$\dot w_\varepsilon(t) = B_\varepsilon(\xi(t-\delta))v_\varepsilon^h(t) + B_\varepsilon^{(1)}(\xi(t-\delta)) + f_\varepsilon^\delta(t)$$

$$\text{при п. в. } t \in [\tau_1, \vartheta], \quad w_\varepsilon(t) \in V_\varepsilon$$

с начальным состоянием $w_\varepsilon(\tau_1) = \xi_0 = r_\varepsilon x_0$. Ее решением является функция

$$w_\varepsilon(\cdot) \in W^{1,2}(T; V_\varepsilon) = \{w(\cdot) \in L_2(T; V_\varepsilon) : w_t(\cdot) \in L_2(T; V_\varepsilon)\},$$

которую в дальнейшем обозначим символом $w_\varepsilon(\cdot) = w_\varepsilon(\cdot\,; \xi(\cdot), v_\varepsilon^h(\cdot))$. Здесь $w_\varepsilon(t) = \xi_0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$; $f_\varepsilon^\delta(t) = f_\varepsilon(\tau_{i-1})$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$; функция $f_\varepsilon(\cdot) \in W^{1,2}(T; V_\varepsilon)$ задается по правилу $(f_\varepsilon(t), y)_\varepsilon = (f(t), p_\varepsilon y)_H$ $\forall\, y \in V_\varepsilon$, п.в. $t \in T$. Управлять моделью будем по принципу обратной связи, разбив весь процесс на $m-2$ однотипных шага. В течение i-го шага, осуществляемого на отрезке времени $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, $i \geq 1$, вычисляется управление $v_\varepsilon^h(t) \in U_\varepsilon$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$:

$$v_\varepsilon^h(t) = \arg \min_{v \in Q_\varepsilon(\gamma(\varepsilon))} \Big\{ \big(B_\varepsilon(\xi(t-\delta))v, S_{h,\varepsilon}(\xi_{i-1}; w_\varepsilon(\tau_i))\big)_\varepsilon + \alpha(h)\|v\|_{U_\varepsilon}^2 \Big\},$$

где

$$S_{h,\varepsilon}(\xi_{i-1}; w_\varepsilon(\tau_i)) = 2\sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j^2 (w_\varepsilon(\tau_i) - \xi_{i-1}, r_\varepsilon \omega_j)_\varepsilon r_\varepsilon \omega_j,$$

$\xi_{i-1} = \xi(\tau_{i-1})$, $N(h)$ таково, что $\sum\limits_{j=N(h)+1}^{\infty} \alpha_j^2 \leq h^2$. Затем пересчитывается фазовое положение модели, т.е. определяется состояние $w_\varepsilon(\tau_{i+1})$. Процесс заканчивается к моменту ϑ.

Обозначим через $u_*(\cdot)$ минимальный по $L_2(T; U)$-норме элемент множества

$$U(x(\cdot)) = \{v(\cdot) \in U_*(P)\colon x(t) = x(t; v(\cdot))\ \forall\, t \in T\}.$$

Здесь $U_*(P) = \{v(\cdot) \in L_2(T; U)\colon v(t) \in P$ при п. в. $t \in T\}$. Множество $U(x(\cdot))$ выпукло, ограничено и замкнуто в $L_2(T; U)$. Поэтому элемент $u_*(\cdot) = u(\cdot; x(\cdot))$ определяется однозначно (по $x(\cdot)$).

Теорема 1. *Имеет место сходимость*

$$\|u_h(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2(T;U)} \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

где $u_h(t) = q_\varepsilon v_\varepsilon^h(t)$ *при п. в.* $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta)$, $i \in [1 : m-1]$, $\varepsilon = \varepsilon(h)$, $\delta = \delta(h)$, $v_\varepsilon^h(t) = v_0$ *при п. в.* $t \in [t_0, \tau_1)$ *(v_0 — произвольный фиксированный элемент из $Q_\varepsilon(\gamma(\varepsilon))$).*

В параграфе 1.3 рассматривается пример задачи, исследованной в параграфе 1.2, а также приводится схема численного решения этой задачи с использованием аппроксимации по методу конечных элементов.

В главе 2 исследуется задача моделирования интенсивности точечных источников в гиперболических системах.

В параграфе 2.1 приводится формулировка изучаемой задачи.

Рассматривается дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $(H, |\cdot|_H)$

$$\ddot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{2}$$

$$x(0) = x_0^* \in H, \quad \dot{x}(0) = x_{10} \in H.$$

Здесь $A : D(A) \subset H \to H$ — замкнутый линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H, являющийся инфинитезимальным генератором сильно непрерывного «оператора косинуса»[19–21] $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, управление $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$ является при каждом $t \in T$ элементом конечномерного евклидова пространства $U = \mathbb{R}^n$, $B : U \to H$ и $S(t) : H \to H$ — линейные непрерывные операторы, $f(t)$ — заданная функция. Полагается выполненным

Условие 2. *$Bu = \sum_{j=1}^{n} \omega_j u_j$, $\omega_j \in D(A)$, $j \in [1 : n]$, $f(\cdot)$, $Af(\cdot) \in C(T; H)$ $((Af(\cdot))(t) = Af(t)$, $t \in T)$, x_0^*, $x_{10} \in D(A)$.*

Решением (слабым) дифференциального уравнения (2) называется функция $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))$, задаваемая формулой[19–21]

$$x(t) = S(t)x_0^* + Q(t)x_{10} + \int_0^t Q(t - \tau)(Bu(\tau) + f(\tau))\, d\tau, \quad t \in T,$$

[19]Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces // Differential equations. I. 1969. T. 5. P. 72–105, II. 1969. T. 6. P. 50–70.

[20]Lasiecka I., Triggiani R. A cosine operator approach to modeling $L_2(0, T; L_2(\Gamma))$-boundary input hyperbolic equation // Appl. Math. and Optim. 1981. Vol. 8, P. 35–93.

[21]Lasiecka I., Triggiani R. Regularity of hyperbolic equations under $L_2(0, T; L_2(\Gamma))$-Dirichlet boundary terms // Appl. Math. and Optim. 1983. Vol. 10, P. 275–286.

где $x_0 = (x_0^*, x_{10})$, $Q(t)$ — «оператор синуса»: $Q(t)x = \int\limits_0^t S(\tau)x\,d\tau$.

В дальнейшем, как и в главе 1, считаем начальное состояние заданным, т. е. величины x_0^* и x_{10} фиксированы.

Рассматриваемая задача состоит в следующем. Слабое решение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ системы (2), зависящее от управления

$$u(\cdot) \in U_T = \{v(\cdot) \in L_2(T; U) : |v(t)|_{\mathbb{R}^n} \le a \quad \text{для п. в. } \ t \in T\}$$

($a \in (0, +\infty)$), определяется на промежутке времени $T = [0, \vartheta]$. Отрезок T разбит на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m-1}$ приближенно замеряется некоторая характеристика фазового состояния системы (2), т. е. находятся вектора $\xi_i^h \in U$ со свойствами

$$|\xi_i^h - z(\tau_i)|_{\mathbb{R}^n} \le h \quad i \in [0 : m-1], \tag{3}$$

где $z(t) = Cx_t(t)$, $C : H \to U$ — линейный непрерывный оператор. Задача состоит в построении алгоритма приближенного вычисления некоторого управления $u_*(\cdot)$ из U_T, порождающего $z(\cdot)$.

В параграфе 2.2 указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения описанной выше задачи, основанный на методе позиционного управления с моделью.

Пусть выполнено

Условие 3. *Ранг матрицы $E(\omega) = \{C\omega_1, \ldots, C\omega_n\}$ равен n.*

Заметим, что при выполнении условий 2 и 3, как доказано в работе, множество $U(z(\cdot))$ (множество всех управлений из U_T, совместимых с выходом $z(t) = C\dot{x}(t)$, т. е.

$$U(z(\cdot)) = \{v(\cdot) \in U_T : z(t) = C\dot{x}(t; x_0, v(\cdot)) \ \ \forall \ t \in T\})$$

одноэлементно: $U(z(\cdot)) = \{u_*(\cdot; z(\cdot))\}$ и состоит из истинного управления, действующего на систему.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(\tau) = C\{y(\tau) + f(\tau)\}; \quad y(\cdot) = x(\cdot; Ax_0^*, Ax_{10}, Af(\cdot));$$

Δ_h, $h \in (0,1)$, — разбиение отрезка T с узлами $\{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ с диаметрами $\delta = \delta(h)$, $m_h = m(\delta(h))$, $\delta(h) = \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i}$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$; $\Xi(z(\cdot), h)$ — множество кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$, $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, удовлетворяющих условию (3); Z_T — множество всех выходов, отвечающих управлениям $v(\cdot) \in U_T$:

$$Z_T = \{z(\cdot) : z(t) = C\dot{x}(t; x_0, v(\cdot)),\ v(\cdot) \in U_T\};$$

$|\cdot|_n$ — евклидова норма $n \times n$-мерной матрицы.

Опишем алгоритм приближенного вычисления управления $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; z(\cdot))$, основанный на методе позиционного управления с моделью. Пусть выбраны $\{\Delta_h\}$ — семейство разбиений интервала T с диаметрами $\delta(h)$ такими, что

$$\delta(h) \to 0, \quad h\delta^{-1/2}(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

и вспомогательная система M (модель), функционирующая синхронно с системой (2):

$$\dot{w}(t) = \sum_{j=1}^{n} v_j^h(t) C\omega_j, \quad t \in T, \quad w(0) = 0,$$
$$\ddot{w}_j(t) - Aw_j(t) = v_j^h(t) A\omega_j, \quad w_j(0) = \dot{w}_j(0) = w_j^{(1)}(0) = 0,$$
$$\dot{w}_j^{(1)}(t) = w_j(t), \quad j \in [1:n], \quad t \in T.$$

Здесь $v^h = \{v_1^h, \ldots, v_n^h\}$, $v^h(t) = 0$ при $t \in [0, \delta]$.

До начального момента времени фиксируются величина h и разбиение $\Delta = \Delta_h$. Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. На i-м шаге, продолжающемся в течение интервала времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, вычисляется элемент

$$v_i^h = \begin{cases} \nu E^{-1}(\omega) s_i |\delta^{-1}(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - \\ -\varphi(\tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^{n} Cw_j(\tau_i)|_{\mathbb{R}^n} / |s_i|_{\mathbb{R}^n}, & \text{если } |s_i|_{\mathbb{R}^n} \neq 0 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$s_i = \xi^h_{i-1} - \xi^h_0 - \int\limits_0^{\tau_{i-1}} \varphi(\tau)\,d\tau - w(\tau_i) - \sum_{j=1}^n C w_j^{(1)}(\tau_i), \quad \delta = \delta(h)$$

и полагается

$$v^h(t) = \{v^h_j(t)\}_{j=1}^n = v^h_i = v^h(t; \xi^h_{0,t}(\cdot), W_{0,t}(\cdot)), \quad t \in \delta_i. \tag{5}$$

Здесь $W(t) = \Big(w(t), \{w_j(t), w_j^{(1)}(t)\}_{j=1}^n\Big)$ — фазовое состояние модели в момент t, $\nu = \mathrm{const} \in [1, \infty)$. Запись $v^h(t; \xi^h_{0,t}(\cdot), W_{0,t}(\cdot))$ означает, что функция $v^h(t)$ зависит от предыстории измерений $\xi^h_{0,t}(\cdot)$, т.е. от $\xi^h(\tau)$, $\tau \in [0, t)$, и реализации траектории модели M — $W(\tau)$, $\tau \in [0, t)$. Затем состояние модели $W(\tau_i)$ трансформируется в состояние $W(\tau_{i+1})$. Процедура завершается в момент времени ϑ.

Введем множество

$$U_T^W = \{x(\cdot) \in L_2(T; U) : |x(\cdot)|_{L_2(T;U)} \leq K\},$$

где

$$K = b_1(1 + \vartheta b_2 \exp(\vartheta b_2)),$$

$$b_1 = 3(\nu |E^{-1}(\omega)|_n^2)\{3 + a_0^2 + a_1^2\}, \quad b_2 = 3\vartheta(|E^{-1}(\omega)|_n a_2)^2,$$

$$a_0 = \sup\{|\dot z(t)|_{\mathbb{R}^n} : t \in T,\ z(\cdot) \in Z_T\},$$

$$a_1 = \sup\{|C\varphi(t)|_{\mathbb{R}^n} : t \in T\}, \quad a_2 = \sup\{|N_0(t,\tau)|_n : 0 \leq \tau \leq t \leq \vartheta\},$$

$$N_0(t,\tau) = \{C(Q(t-\tau)A\omega_1), \ldots, C(Q(t-\tau)A\omega_n)\}.$$

Заметим, что K является верхней гранью для $L_2(T;U)$-норм всех управлений $v^h(\cdot)$ вида (4), (5). Согласно теореме Бишопа на U_T^W можно определить слабую норму $|\cdot|_w$. Соответствующая сходимость в $U_T = U_T^W$ будет эквивалентна слабой сходимости в $L_2(T;U)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 2 *и* 3, *тогда*

$$\lim_{h\to 0} \sup\big\{|v^h(\cdot;\xi^h(\cdot), W(\cdot)) - u_*(\cdot; z(\cdot))|_w : \\ z(\cdot) \in Z_T,\ \xi^h(\cdot) \in \Xi(z(\cdot), h),\ W(\cdot)\big\} = 0.$$

В параграфе 2.3 эффективность предложенного алгоритма иллюстрируется на просчитанном на ПЭВМ модельном примере.

Глава 3 посвящена задаче нахождения оптимального значения скалярного параметра, при котором зависящая от этого параметра система невыпуклых неравенств имеет решение в пределах заданного множества. Само это решение также подлежит нахождению.

В параграфе 3.1 изложена постановка задачи и предложен итерационный алгоритм решения для случая, когда имеется точная информация о системе неравенств и о множестве допустимых решений.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$p \longrightarrow \min, \tag{6}$$

$$h_s(p,x) \le 0 \quad (s = 1,\dots,m), \tag{7}$$

$$p \ge 0, \quad x \in Z. \tag{8}$$

Здесь Z — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, функции $h_s : (p,x) \mapsto h_s(p,x) : [0,\infty) \times Z \mapsto \mathbb{R}^1$ $(s = 1,\dots,m)$ непрерывны, выпуклы по x. Ограничения (7)–(8) предполагаются совместными, что обеспечивает существование решения задачи (6)–(8).

Обозначим через $W_* = \{p_*\} \times Z_* \subset [0,\infty) \times Z$ множество всех решений задачи (6)–(8), а также введем следующее обозначение:

$$\mathrm{dist}(p,x,W_*) = \inf\{|p-p_*| + |x-x_*|_{\mathbb{R}^n} : (p_*,x_*) \in W_*\} \quad (p \ge 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

Далее, обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m}$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$, $h(p,x)_+ = (h_1(p,x)_+,\dots,h_m(p,x)_+)$, $h_s(p,x)_+ = \max\{0, h_s(p,x)\}$, $h(p,u) = (h_1(p,u), \dots, h_m(p,u))$.

Алгоритм.

На 0-м шаге алгоритма полагаем $p^1 = 0$ и фиксируем произвольное $x^1 \in Z$.

На k-м шаге $(k = 1,\dots)$ преобразуем пару (p^k, x^k) в пару (p^{k+1}, x^{k+1}). При этом p^{k+1} определяется как первая компонента решения

$$(p^{k+1}, u^{k+1}) \tag{9}$$

следующей вспомогательной задачи:

$$p \longrightarrow \min, \tag{10}$$

$$p \geq p^k, \tag{11}$$

$$\langle h(p^k, x^k)_+, h(p, u)\rangle_{\mathbb{R}^m} \leq 0, \tag{12}$$

$$u \in Z. \tag{13}$$

Далее, вычисляем x^{k+1} по формулам

$$x^{k+1} = x^k + \delta_{k+1}(u^{k+1} - x^k), \tag{14}$$

где

$$\delta_{k+1} = \arg\min_{0 \leq \delta \leq 1} \left(\sum_{s=1}^{m} h_s(p^k, x^k + \delta(u^{k+1} - x^k))_+^2 \right). \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть* $p^1 = 0$, $x^1 \in Z$, *и* (p^k, x^k) $(k = 2, \dots)$ *определены по алгоритму (9)–(13), (14), (15). Тогда* (p^k, x^k) *сходится к множеству решений задачи (6)–(8):*

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{dist}(p^k, x^k, W_*) = 0.$$

В параграфе 3.2 аналогичная задача решается при $p \in [0, P]$, $P > 0$, в условиях, когда доступна лишь неточная информация о множестве Z и функциях h_s. На последние наложено дополнительное ограничение липшицевости по x. Для этого случая построен регуляризирующий алгоритм решения.

В параграфе 3.3 рассматриваемая задача конкретизируется в приложении к оптимальному гарантированному страхованию катастрофических рисков сетью страховых компаний. Приводится конструктивный алгоритм нахождения оптимального распределения страховых портфелей.

В параграфе 3.4 эффективность предлагаемого алгоритма иллюстрируется на численном примере.

Основные результаты, выносимые на защиту

Для задачи моделирования управлений в параболических уравнениях по результатам неточных измерений фазовых состояний указан регуляризирующий алгоритм решения, основанный на методе позиционного управления по принципу обратной связи с использованием аппарата конечномерной внутренней аппроксимации.

Для задачи динамического моделирования интенсивности точечных источников в гиперболических системах по результатам сенсорных наблюдений сконструирован регуляризирующий алгоритм решения, основанный на методе позиционного управления по принципу обратной связи со вспомогательной системой.

Построен регуляризирующий итерационный алгоритм нахождения оптимального параметра совместности для системы нелинейных невыпуклых неравенств в условиях неточных данных. Предложен конструктивный алгоритм решения задачи оптимального гарантированного страхования.

Публикации по теме диссертации

[1] Букчин Б.Г., Дигас Б.В., Максимов В.И. К проблеме реконструкции интенсивности точечных источников по результатам сенсорных наблюдений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 201–216.

[2] Digas B.V., Maksimov V.I. Dynamical Identification of Coefficients of Parabolic Equations // Proceedings of the 3rd International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR-96), September 10–13, 1996, Międzyzdroje, Poland. P. 171–176.

[3] Дигас Б.В., Максимов В.И. О динамической реконструкции управлений в параболических системах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, вып. 3. С. 398–412.

[4] Digas, B.V., Ermoliev, Yu.M., Kryazhimskii, A.V., Guaranteed Optimization in Insurance of Catastrophic Risks. IIASA Interim Report IR-98-082, Laxenburg, Austria, 1998. 12 pp.

[5] Дигас Б.В., Об одной экстремальной задаче в гильбертовом пространстве // Тез. междунар. науч. конф. «Дифференциальные и интегральные уравнения», Челябинск, 22–26 июня 1999 г. С. 40.

[6] Кряжимский А.В., Дигас Б.В. Оптимизация страхования катастрофических рисков: гарантированный подход // Сб. «Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы». Екатеринбург: Изд-во УрГЭУ, 2000. С. 98–105.

[7] Дигас Б.В. Об одной модификации алгоритма оптимального страхования катастрофических рисков // Тр. XXXIII Молодежной школы-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 28 января — 1 февраля 2002 г. С. 229–233.

[8] Baranov S., B. Digas, T. Ermolieva, V. Rozenberg, Earthquake risk management: a scenario generator. IIASA Interim Report IR-02-025, Laxenburg, Austria, April 2002. 22 pp.

[9] Дигас Б.В. Об одном алгоритме решения обратной задачи для системы гиперболического типа // Тез. докл. Междунар. семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби» (CGS'05). Екатеринбург. 2005. С. 55–56.

[10] Дигас Б.В. Об одной задаче невыпуклой оптимизации в условиях неточности данных. Тез. докл. 13-й Всероссийской конф. «Математическое программирование и приложения». г. Екатеринбург, 26 февраля — 2 марта 2007 г. С. 237.

[11] Digas B.V., On an algorithm of non-convex optimization under inaccurate information // Тр. Второй Междунар. конф. «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2007), 20–22 июня 2007 г., Москва. С. 60–63.

Дигас Борис Вадимович

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПОЗИЦИОННО-УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Автореферат

Подписано в печать 05.09.2007
Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$. Объем 1.5 п.л.
Тираж 100 экз.